Raisonnement par récurrence

I) Principe du raisonnement par récurrence

Pour démontrer qu'une proposition (P_n) est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 fixé on procède en trois étapes :

• Première étape : On vérifie que (P_{n_0}) est vraie. C'est-à-dire que la proposition est vraie pour le premier indice $n = n_0$

• Deuxième étape : On suppose que pour un entier n quelconque ($n \geq n_0$), la proposition (P_n) est vraie, et sous cette hypothèse, dite de récurrence, on démontre qu'alors la proposition (P_{n+1})est vraie.

On dit alors que la proposition est héréditaire

• Troisième étape : Lorsque les deux étapes ont été réalisées, on conclut que la proposition (P_n)est vraie pour tout entier naturel n ($n \geq n_0$).

Remarque : Le raisonnement par récurrence repose sur le même principe que la théorie des dominos :

On considère une suite de dominos. Si un domino tombe alors le suivant tombera.

Comme le 1^{er} tombe alors le second tombera, puis le troisième etc …..

Le raisonnement par récurrence comporte deux phases :

1. Prouver que le premier domino tombe.

2. Démontrer que si le nième domino tombe alors le suivant (le n+1 ^{ième} domino) tombera…

Si on démontre ces deux points alors la réaction en chaine se déclenche et tous les dominos tomberont !!

En résumé : Si tu donnes l'impulsion de départ (initialisation) et que ta rangée de dominos est bien construite (hérédité) alors toute la rangée tombera. Mais attention, il faut que l'hérédité soit vraie partout. S'il y a ne serait-ce qu'une liaison qui ne fonctionne pas, la destruction totale est fichue.

Dans notre cas, un domino n qui tombe est une propriété ou une formule vraie au rang n.

II) Exemples

1) Exemple 1:

En classe de 1re nous avons admis sans démonstration que :

Pour tout entier n ≥ 1 : $S_n = 1 + 2 + \ldots\ldots n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

En utilisant un raisonnement par récurrence nous pouvons maintenant démontrer cette formule :

Soit pour $n \geq 1$, P_n : $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

• **P_1 est vraie.** En effet lorsque $n = 1$ on obtient : $S_1 = \dfrac{1(1+1)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

• Supposons que pour **un entier n quelconque fixé** $(n \geq 1)$ on ait P_n vraie c'est-à-dire

$S_n = 1 + 2 + \ldots\ldots n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

alors $S_{n+1} = S_n + (n+1) = 1 + 2 + \ldots\ldots n + (n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{2(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ **ce qui implique que P_{n+1} est vraie**

On a donc démontré le caractère héréditaire de cette propriété.

On peut donc conclure que **la proposition est vraie pour tout entier naturel n (non nul).**

• **Donc pour tout entier naturel $n \geq 1$: $1 + 2 + \ldots\ldots n = \dfrac{n(n+1)}{2}$**

2) Exemple 2:

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $4^n + 5$ est un multiple de 3.
Soit P_n : $4^n + 5$ est multiple de 3.

• **P_0 est vraie.** En effet lorsque $n = 0$ on obtient : $4^0 + 5 = 1 + 5 = 6$ et 6 est bien un multiple de 3.

• Supposons que pour **un entier n quelconque fixé** $(n \geq 1)$ on ait P_n vraie c'est-à-dire

$4^n + 5$ est un multiple de 3. Cela veut dire qu'il existe un nombre entier relatif k tel que :

$4^n + 5 = 3k \quad k \in \mathbb{N}$

En multipliant par 4 les deux membres de l'égalité on obtient

$4\,(4^n + 5) = 4 \times 3k \quad k \in \mathbb{N}$

$4^{n+1} + 20 = 12k \quad k \in \mathbb{N}$

$4^{n+1} + 5 + 15 = 12k \quad k \in \mathbb{N}$

$4^{n+1} + 5 = 12k - 15 \quad k \in \mathbb{N}$ en factorisant le membre de droite par 3 on obtient :

$4^{n+1} + 5 = 3(4k - 5) \quad k \in \mathbb{N}$

Ce qui implique que $4^{n+1} + 5$ est bien un multiple de 3.

Ce qui implique que P_{n+1} est vraie

On a donc démontré le caractère héréditaire de cette propriété.

On peut donc conclure que **la proposition est vraie pour tout entier naturel n (non nul).**

• **Donc pour tout entier naturel n, $4^n + 5$ est un multiple de 3**

3) Exemple 3:

Exemple 3: Exprimer U_n en fonction de n

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n + 1} \end{cases}$$

On prend quelques exemples pour essayer de trouver une relation entre U_n et n :

$$U_0 = 1 = \frac{1}{0+1}$$

$$U_1 = \frac{U_0}{U_0 + 1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

$$U_2 = \frac{U_1}{U_1 + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2+1}$$

$$U_3 = \frac{U_2}{U_2 + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4} = \frac{1}{3+1}$$

Nous pouvons conjecturer que $U_n = \frac{1}{n+1}$. Maintenant nous allons le montrer en utilisant un raisonnement par récurrence :

Soit P_n : $u_n = \frac{1}{n+1}$

• **P_0 est vraie.** En effet lorsque $n = 0$ on obtient : $U_0 = \frac{1}{0+1} = 1$

• Supposons que pour **un entier n quelconque fixé** ($n \geq 1$) on ait P_n vraie c'est-à-dire: $U_n = \frac{1}{n+1}$

Alors $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n + 1} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+1} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+\frac{n+1}{n+1}} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}} = \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{1}{n+1+1}$

Ce qui implique que P_{n+1} est vraie

On a donc démontré le caractère héréditaire de cette propriété.

On peut donc conclure que **la proposition est vraie pour tout entier naturel n (non nul).**

• **Donc pour tout entier naturel n, $U_n = \dfrac{1}{n+1}$.**